PART3　連立漸化式

3　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α, β の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

Point Pickup

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の連立漸化式から数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める方法として

$$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$$

を満たす α, β の組を求め，数列 $\{a_n-\alpha b_n\}$ の一般項を n の式で表す方法がある。

第 3 講　PART3　確認問題

1　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\ b_1=1,$$

$$a_{n+1}=6a_n+6b_n,\ b_{n+1}=-a_n+b_n$$

で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の値を求めよ。

$(\alpha,\ \beta)=($ **アイ** , **ウ** $)$, $($ **エオ** , **カ** $)$

（ただし， アイ $<$ エオ とする）

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_n=-$ **キ** $\cdot$ ウ $^{n-1}$ $+$ **ク** $\cdot$ カ $^{n-1}$

$b_n=$ **ケ** $\cdot$ ウ $^{n-1}$ $-$ **コ** $\cdot$ カ $^{n-1}$

PART3　連立漸化式

3　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α, β の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ を代入すると

$$2a_n+3b_n-\alpha(3a_n+2b_n)=\beta a_n-\alpha\beta b_n$$

すなわち　$(2-3\alpha)a_n+(3-2\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$$2-3\alpha=\beta,\ 3-2\alpha=-\alpha\beta$$

より

$$3-2\alpha=-\alpha(2-3\alpha)\qquad \alpha^2=1\qquad \text{よって}\quad \alpha=\pm1$$

したがって　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 5),\ (1,\ -1)$

(2)　(1)の結果より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n),\ a_1+b_1=3$$

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n),\ a_1-b_1=1$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項3，公比5の等比数列であり，数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項1，公比 -1 の等比数列である。

したがって

$$a_n+b_n=3\cdot5^{n-1}\ \cdots\cdots\ ①\qquad a_n-b_n=(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\ ②$$

(①＋②)÷2 より　$a_n=\dfrac{3\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$

(①－②)÷2 より　$b_n=\dfrac{3\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}$

第3講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-3，ウ：3，エオ：-2，カ：4，
キ：8，ク：9，ケ：4，コ：3

[解説]

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に，[A]
$a_{n+1}=6a_n+6b_n$，$b_{n+1}=-a_n+b_n$ を代入すると

$$6a_n+6b_n-\alpha(-a_n+b_n)=\beta(a_n-\alpha b_n)$$

すなわち

$$(6+\alpha)a_n+(6-\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$$6+\alpha=\beta,\ 6-\alpha=-\alpha\beta \quad \text{[B]}$$

よって　$6-\alpha=-\alpha(6+\alpha)$

$$\alpha^2+5\alpha+6=0$$

$$(\alpha+3)(\alpha+2)=0$$

ゆえに　$\alpha=-3,\ -2$

したがって　$(\alpha,\ \beta)=(-3,\ 3),\ (-2,\ 4)$

(2)　(1)の結果より

$$a_{n+1}+3b_{n+1}=3(a_n+3b_n),$$

$$a_1+3b_1=4$$

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=4(a_n+2b_n),$$

$$a_1+2b_1=3$$

よって，
数列 $\{a_n+3b_n\}$ は初項 4, 公比 3 の等比数列，[C]
数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列である。

したがって

> [A]　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の連立漸化式から，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める方法として
> $a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$
> を満たす α，β の値を求める。

> [B]　恒等式であるから，係数を比較する。

> [C]　$a_{n+1}=ra_n$
> 公比 r の等比数列

$$a_n+3b_n=4\cdot3^{n-1}\ \cdots\cdots ①$$ [D]

$$a_n+2b_n=3\cdot4^{n-1}\ \cdots\cdots ②$$

① − ②より　$\boldsymbol{b_n=4\cdot3^{n-1}-3\cdot4^{n-1}}$

これを②に代入すると

$$a_n+2(4\cdot3^{n-1}-3\cdot4^{n-1})=3\cdot4^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=-8\cdot3^{n-1}+9\cdot4^{n-1}}$

[D]　数列 $\{a_n-\alpha b_n\}$ の一般項を n の式で表す。